# 第12講　3次方程式の実数解について

12 次の各問いに答えよ．ただし，実数 $x$ に対し，$x$ 以下の最大整数を $x$ の整数部分とし $[x]$ で表し，このときの $x-[x]$ を $x$ の小数部分とする．

(1) $f(x)=x^3-4x+1$ に関して，3次方程式 $f(x)=0$ の異なる3つの実数解を小さい方から $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ とする．$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ の整数部分をそれぞれ求めよ．また，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ のうち小数部分が最小となるものはどれか．

(2) $g(x)=x^3+3x^2+mx+1$ について，3次方程式 $g(x)=0$ の異なる実数解の個数が3個，2個，1個となる条件をそれぞれ求めよ．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第12講　3次方程式の実数解について

12　$f(x)=8x^3+4x^2-4x-1$ とする．方程式 $f(x)=0$ は異なる3つの実数解をもち，その中で正であるものはただ1つであることを示せ．また，その解を $\alpha$ とするとき，$\alpha$ の小数第1位の数を求めよ．

【選択肢】 ㋐　6　　㋑　7　　㋒　8



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第12講　3次方程式の実数解について

**12**　次の各問いに答えよ．ただし，実数 $x$ に対し，$x$ 以下の最大整数を $x$ の整数部分とし $[x]$ で表し，このときの $x-[x]$ を $x$ の小数部分とする．

(1)　$f(x)=x^3-4x+1$ に関して，3 次方程式 $f(x)=0$ の異なる 3 つの実数解を小さい方から $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ とする．$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ の整数部分をそれぞれ求めよ．また，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ のうち小数部分が最小となるものはどれか．

(2)　$g(x)=x^3+3x^2+mx+1$ について，3 次方程式 $g(x)=0$ の異なる実数解の個数が 3 個，2 個，1 個となる条件をそれぞれ求めよ．

**【答】** (1) $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ の整数部分は順に $-3$，$0$，$1$，小数部分が最小となるのは $\beta$

(2)
$$\begin{cases} 3\text{ 個となる条件は}\quad m<-\dfrac{15}{4} \\ 2\text{ 個となる条件は}\quad m=-\dfrac{15}{4} \\ 1\text{ 個となる条件は}\quad m>-\dfrac{15}{4} \end{cases}$$

**【解答】**

(1)　$f(-3)=-14<0$，$f(-2)=f(0)=f(2)=1>0$，$f(1)=-2<0$ より，

3 次方程式 $f(x)=0$ の実数解は $-3<x<-2$ と $0<x<1$ と $1<x<2$ の間にそれぞれ 1 つずつ存在する．

よって $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ の整数部分は順に $\mathbf{-3}$，$\mathbf{0}$，$\mathbf{1}$

また，$f\left(-\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{37}{8}<0$ と $f(-2)=1>0$ より $\alpha$ の小数部分は 0.5 より大で，

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{7}{8}<0$ と $f(0)=1>0$ より $\beta$ の小数部分は 0.5 より小，さらに $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{13}{8}<0$ と $f(2)=1>0$ より $\gamma$ の小数部分は 0.5 より大となるので，小数部分が最小となるのは $\boldsymbol{\beta}$

(2)　$g(x)=x^3+3x^2+mx+1$ より，$g'(x)=3x^2+6x+m=3(x+1)^2+m-3$

(Ⅰ)　$m-3\geqq 0$ すなわち $m\geqq 3$ のとき，$g'(x)\geqq 0$ より 3 次方程式 $g(x)=0$ の異なる実数解の個数は 1

(Ⅱ)　$m-3<0$ すなわち $m<3$ のとき，$g'(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもち，それらを $\alpha$，$\beta$ $(\alpha<\beta)$ とおくと $\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=\dfrac{m}{3}$ である．

また，$g(x)=g'(x)\cdot\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{m-3}{3}(2x-1)$ より

$$\begin{aligned} g(\alpha)g(\beta)&=\frac{m-3}{3}(2\alpha-1)\cdot\frac{m-3}{3}(2\beta-1) \\ &=\frac{(m-3)^2}{9}\{4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1\} \\ &=\frac{(m-3)^2}{9}\left\{4\cdot\frac{m}{3}-2(-2)+1\right\} \\ &=\frac{(m-3)^2}{27}(4m+15) \end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

となるので，

$4m+15>0$ すなわち $-\dfrac{15}{4}<m<3$ のとき，$g(x)=0$ の異なる実数解の個数は 1

$4m+15=0$ すなわち $m=-\dfrac{15}{4}$ のとき，$g(x)=0$ の異なる実数解の個数は 2

$4m+15<0$ すなわち $m<-\dfrac{15}{4}$ のとき，$g(x)=0$ の異なる実数解の個数は 3

(Ⅰ)，(Ⅱ)より $g(x)=0$ の異なる実数解が
**3 個となる条件は　$m<-\dfrac{15}{4}$**
**2 個となる条件は　$m=-\dfrac{15}{4}$**
**1 個となる条件は　$m>-\dfrac{15}{4}$**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 12 講　3 次方程式の実数解について

12　$f(x)=8x^3+4x^2-4x-1$ とする．方程式 $f(x)=0$ は異なる 3 つの実数解をもち，その中で正であるものはただ 1 つであることを示せ．また，その解を $\alpha$ とするとき，$\alpha$ の小数第 1 位の数を求めよ．

**【選択肢】**　㋐　6　　㋑　7　　㋒　8

**【答】**　㋐

**【解答】**

$f'(x)=24x^2+8x-4=4(6x^2+2x-1)$ より，$f(x)$ の増減は

| $x$ | $\cdots$ | $\dfrac{-1-\sqrt{7}}{6}$ | $\cdots$ | $\dfrac{-1+\sqrt{7}}{6}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ | | ↗ |

この増減と

$$\frac{-1-\sqrt{7}}{6}<-\frac{1}{2}<0<\frac{-1+\sqrt{7}}{6}\quad \text{および}\quad f\left(-\frac{1}{2}\right)=1>0,\ f(0)=-1<0$$

から

$$f\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{6}\right)>0,\qquad f\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{6}\right)<0$$

よって，$f(x)=0$ は異なる 3 つの実数解をもち，その中で正の解は 1 つだけであることが示された．

また $f(x)=4x(2x^2+x-1)-1$ より

$$f(0.6)=2.4(0.72+0.6-1)-1=-0.232<0$$
$$f(0.7)=2.8(0.98+0.7-1)-1=0.904>0$$

であるので，$f(x)=0$ の正の解は 0.6 と 0.7 の間にある．

よって，$\alpha$ の小数第 1 位は **6**

ⒸRECRUIT HOLDINGS



本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。